LINEAIRE DYNAMISCHE TOESTANDRUIMTEMODELLEN IN HET TIJDS-DOMEIN

R-92-65
F.D. Bijleveld
Leidschendam, 1992
Stichting Wetenschappelijk Onderzoek Verkeersveiligheid SWOV

Inhoud

Samenvatting 4

1 Inleiding 5

2 Lineaire dynamische toestandruimtemodellen in het tijdsdomein 8

2.1 Algemeen 8

2.2 De matrix F (transitiematrix) 9

2.3 Invloed begintoestand en invoer in de toekomst 10

2.4 De matrix H (waarnemingsmatrix, meetmatrix) 12

2.5 De matrix D (beïnvloedingsmatrix) 13

2.6 Asymptotische matrix F en D 14

2.7 Implementaties 14

3 Optimale keuze van gewichten voor twee schatters 16

3.1 De één-dimensionale situatie 16

3.2 De meer-dimensionale situatie 18

4 Toestandruimtemodellen en Kalmanfiltering 21

4.1 Definitie van het filter 21

4.2 De ontwikkeling van $\mathbf{K}_t$ als $t \to \infty$ 22

5 Constructie van het 'filter' volgens statespace 24

6 Conclusie 28

Literatuur 30

A Definities uit de lineaire algebra 31

B Afgeleide functies statespace 34

Samenvatting

Binnen het verkeersveiligheidsonderzoek is regelmatig sprake van tijdgebonden observaties. Dit kan variëren van het aantal ongevallen voor een wegvak of gebied voor een aantal jaren, tot de snelheid en positie van een voertuig voor elke seconde. Bij de analyse van dergelijke gegevens is het gemeenschappelijke steeds dat gezocht wordt naar de invloed van bepaalde 'maatregelen' en de wijze waarop 'het systeem' (het wegvak, resp. het voertuig) met die invloeden verwerkt.

In de praktijk blijkt een grote klasse van tijdgebonden observaties te formuleren te zijn als lineaire dynamische toestandruimtemodellen. Dit betekent dat gebruikmakend van deze formulering een 'standaard' formulering voor dergelijke modellen verkregen kan worden. Naast deze standaaard levert deze formulering ook nog enige statistische voordelen op. Lineaire dynamische toestandruimtemodellen worden zowel in exploratieve modellen in de systeemtheorie gebruikt Bijleveld (1989) waarin men meer geïnteresseerd is in de algemene machinaties van een systeem, als in meer op toetsing gerichte interventieanalysemodellen Harvey (1985) waarin men behoefte heeft aan uitspraken over de significantie van bepaalde effecten. Onderzocht wordt het model dat bepaalt hoe de invoergrootheden invloed uitoefenen op de toestandgrootheden en hoe de toestandgrootheden de uitvoergrootheden bepalen. In dit rapport wordt het accent gelegd op het interpreteren van de parameters van een dergelijk model, vooral in exploratieve zin. Daarmee wordt het mogelijk het relatieve belang van verschillende invoergrootheden (interventiemogelijkheden) voor de uitvoer aan te geven. Er kan een aantal klassen onderscheiden worden:

- invoer die geen (waarneembaar) effect op het systeem heeft;
- invoer die een waarneembaar, maar op den duur verdwijnend effect heeft;
- invoer die een blijvend effect binnen een bepaalde grootte heeft (voorzover er geen andere invoer komt);
- invoer die een blijvende en steeds groter wordende (destabiliserende) invloed heeft.

Verder wordt aangegeven hoe de techniek van *Kalmanfiltering* toegepast kan worden op meerdimensionele toestandruimtemodellen.

1 Inleiding

Bij veel onderzoek wordt statistiek gebruikt als hulpmiddel om theorieën te toetsen. Het komt nog wel eens voor dat theorieën de vorm krijgen van een functioneel verband, dat wil zeggen dat zo'n theorie veronderstelt dat een (bijvoorbeeld verkeersonveiligheids)resultaat te zien is als functie van de door diezelfde theorie als relevant veronderstelde omstandigheidsvariabelen. Analysemodellen zoals bijvoorbeeld regressie-analyse, maar ook de niet-lineaire analysetechnieken, maken wel eens weinig of geen gebruik van het volgens de te onderzoeken theorie aanwezig geachte mechanisme van het (verkeersonveiligheids)proces. Als voorbeeld kan het optreden van interacties dienen. Dit verschijnsel wordt vaak alleen als zodanig opgemerkt en verder niet verklaard. Dergelijke modellen proberen 'eenvoudig' een (al dan niet lineaire) functie vast te stellen die het (verkeersonveiligheids)resultaat zo goed mogelijk verklaart uit de gegeven omstandigheidsvariabelen, zonder rekening te houden met een theoretisch mechanisme. Deze benadering wordt ook wel de externe benadering genoemd. Tegenover de externe benadering staat de interne benadering. Onder deze noemer valt natuurlijk veel te verstaan, dus beginnen we met een zeer algemene omschrijving:

```
invoer ======> systeem ======> uitvoer
```

Hierin zijn de omstandigheden de *invoer*, en het resultaat de *uitvoer*. In het systeem speelt zich één of ander proces af dat we in de meeste gevallen kunnen karakteriseren met de *toestand* waarin het systeem zich op een bepaald moment bevindt. Ook zou men hiervoor de *toestandsverandering* kunnen nemen. De achtergrond hiervan is dat, bijvoorbeeld op verkeersveiligheid toegespitst, we veronderstellen dat bepaalde omstandigheden een verkeersproces in een bepaalde toestand brengen, hetgeen op zijn beurt een bepaald verkeersonveiligheidsresultaat oplevert (en dus niet de omstandigheden zelf). Als voorbeeld kan dienen zeer koud weer, zelden zal iemand een ongeval krijgen als gevolg van de koude, hoogstens als gevolg van onder andere het gladde wegdek dat het gevolg is van het koude weer.

```
lage temperatuur ==> glad wegdek ==> ongeval
```

Een eenvoudige omschrijving van het verkeersproces is de toestand van het wegdek, we kunnen stellen dat het verkeersproces in de toestand glad wegdek verkeert. In de praktijk zal het verkeersproces natuurlijk door een samenstelling van veel meer kenmerken getypeerd moeten worden. Aan de hand van deze omschrijving van het begrip *toestand* zullen we nu tot een formulering van een zogenaamd *toestandruimtemodel* komen. Dit houdt in dat de toestanden zich in een bepaalde ruimte bevinden, waarin onder bepaalde invloeden bewogen kan worden. Laten we voorlopig aannemen dat de toestand van een systeem slechts afhankelijk is van de omstandigheden (invoer) en het resultaat (uitvoer) slechts afhankelijk is van de toestand. Bovendien nemen we aan dat de verbanden functioneel zijn (dat wil zeggen dat de toestand als functie van de omstandigheden te 'schrijven' is en het resultaat als functie van de toestand). Nemen we nu X als toestandsvariabele, y als uitvoervariabele en u als invoervariabele dan kan een formulering er als volgt uit zien:

$$
\begin{aligned}
X &= F(u) \qquad\qquad \text{(systeemvergelijking)}\\
y &= G(X) \qquad\qquad \text{(uitvoervergelijking)}
\end{aligned}
$$

met F en G als 'passende' functies. Dit is uiteraard een eenvoudige vorm van het model, waarbij opvalt dat men ook y direct kan uitdrukken in u via de functie H, gedefinieerd als $H = G(F)$. Dit leidt natuurlijk tot de vraag waarom al deze moeite als 'het' ook direct kan? Er dient dan opgemerkt te worden dat wanneer men een toevallige fout in het model introduceert deze opzet voordelen biedt, in die zin dat men deze 'modelfout' kan opsplitsen in een fout in de systeemvergelijking en in een fout in de uitvoervergelijking, dit nog afgezien van de eerder genoemde theoretische gronden.

Om uit te leggen wat precies onder de modelfout is te verstaan dient het volgende voorbeeld: Stel er bestaat een functioneel verband tussen de grootheid Z en de grootheden X en Y, stel $Z = F(X,Y)$. Omdat het nu eenmaal praktisch niet mogelijk is geheel zonder fouten te meten zullen we bij iedere realisatie van een experiment waarbij X, Y en Z worden waargenomen in plaats van X in werkelijkheid het getal x waarnemen met $X = x + fout(x)$, in plaats van Y het getal y met $Y = y + fout(y)$ en $Z = z + fout(z)$. Dit zal tot gevolg hebben dat $z \neq F(x,y)$, terwijl het verband wel degelijk aanwezig is. Om dit effect te verklaren introduceren we het begrip modelfout (die eigenlijk een meetfout of observatiefout is).

Een andere manier om een modelfout te verkrijgen ligt veel meer voor de hand, namelijk de fout welke het model maakt doordat het model eigenlijk niet past. Dit komt nogal eens voor als men genoodzaakt wordt met vereenvoudigde modellen te werken. Het werken met vereenvoudigde modellen komt voor in vele disciplines van onderzoek, hetgeen toelaatbaar is zolang (uiteraard) de modelfout niet te groot is. Een in de praktijk veel gebruikte vereenvoudiging is wel de lineaire benadering (het lineaire model), die we verder in essentie als basis nemen voor deze beschouwing. Het lineaire model heeft onder de aanname dat de fouttermen bijvoorbeeld normaal verdeeld zijn grote voordelen, namelijk stel F is een lineaire functie:

$$F(X,Y) = a \times X + b \times Y + c.$$

Nu is:

$$
\begin{aligned}
Z &= a \times X + b \times Y + c \Rightarrow\\
z + \text{fout}(z) &= a \times (x + \text{fout}(x)) + b \times (y + \text{fout}(y)) + c\\
z &= a \times x + b \times y + c + \{a \times \text{fout}(x) + b \times \text{fout}(y) - \text{fout}(z)\}\\
z &= a \times x + b \times y + c + \text{fout}\\
z &= F(x,y) + \text{fout}
\end{aligned}
$$

met fout $= \{\ldots\}$ die op zijn beurt weer normaal verdeeld is. Deze fout kunnen we de modelfout noemen. Nu is de kunst van het modelleren (in dit geval) de parameters a, b en c zo te kiezen dat een gegeven maat op de fout zo klein mogelijk is. Termen die in dit verband veel voorkomen zijn minimum variantie, maximum 'likelihood' en kleinste kwadraten. Passen we dit resultaat toe op de eerder genoemde systeem- en uitvoervergelijkingen toe dan krijgen we:

$$\begin{aligned} z &= F(x) + w && \text{(systeemvergelijking)} \\ y &= G(z) + v && \text{(uitvoervergelijking)} \end{aligned}$$

met w en v als fouttermen: w noemt men wel de systeemfout en v de meetfout. Hier moet worden opgemerkt dat in het lineaire geval $y = H(x) + fout$ gelijkwaardige resultaten geeft en dat zonder onderliggende theorie de opsplitsing in twee soorten fouten niet eenduidig uitgevoerd kan worden.

Komen we bij het volgende punt: meer observaties. We zullen nooit een theorie willen toetsen aan de hand van één enkele waarneming. Dit zal tot gevolg hebben dat we met meer dan één observatie per experiment te maken krijgen. Uiteraard zal voor al deze observaties hetzelfde model moeten gelden, zodat we formules krijgen zoals:

$$\begin{aligned} z_i &= F(x_i) + w_i && \text{(systeemvergelijking)} \\ y_i &= G(z_i) + v_i && \text{(uitvoervergelijking)} \end{aligned}$$

met $i = 1, \ldots, N$ (= aantal observaties). In feite hebben we nu $2N$ vergelijkingen met 2N fouttermen waarvan we een functie willen minimaliseren. Bijvoorbeeld met de kleinste kwadraten:

$$ssq = \sum_{i=1}^{N} (w_i^2 + v_i^2). \tag{1.1}$$

Dit gegeven brengt ons bij een interessante uitbreiding van ons model, namelijk: wat gebeurt er als we aannemen dat de observaties enig onderling verband vertonen? Deze gedachtengang is zo gek nog niet als we het voorbeeld van de toestand van een individuele verkeersdeelnemer/ster in de tijd tijdens een verkeershandeling beschouwen. We kiezen maar weer voor een automobilist. Iedereen wil wel aannemen dat de toestand van een automobilist beïnvloed wordt door de toestanden waarin de automobilist zich (juist) daarvoor bevonden heeft. Neem bijvoorbeeld het gevoel voor snelheid van de automobilist na het berijden van een lagere orde weg in vergelijking met na het berijden van een autosnelweg. Een ander, meer natuurkundig, voorbeeld is de snelheid van een auto met als invoer bijvoorbeeld de energie die aan de auto wordt toegevoerd of onttrokken (remmen). Duidelijk is dat de toegevoegde energie op een tijdstip T een versnelling veroorzaakt op dat zelfde tijdstip, deze versnelling zal van invloed zijn op de snelheid van de auto op een tijdstip $t > T$ naast de snelheid op tijdstip T.

Naast deze indeling in het 'tijdsdomein' kan men natuurlijk ook op andere wijze tot een dergelijk geordend model komen. Laten we bijvoorbeeld het 'plaats op de route'-domein kiezen. Dit ten behoeve van bijvoorbeeld het analyseren van meer op plaats geaggregeerde gegevens. Het zich voordoen van overtredingen van de maximum snelheid zou kunnen afhangen van het aangesloten zijn van het betreffende weggedeelte op een weggedeelte waar een (veel) hogere maximum snelheid geldt. Aangezien het in bepaalde gevallen mogelijk is de route op twee manieren te benaderen zal men misschien ook naar een 'gemengd' model moeten kijken: de toestand op plaats i is zowel van de toestanden voor als na i (en misschien zelfs naast i) afhankelijk.

2 Lineaire dynamische toestandruimtemodellen in het tijdsdomein

2.1 Algemeen

We beperken ons nu tot waarnemingen in het tijdsdomein en nemen verder aan dat onze waarnemingen met gelijke (of tenminste gelijkwaardige, bijvoorbeeld vergelijkbare ontwikkelingsstappen) tussenpozen geregistreerd zijn. Bovendien gaan we er van uit dat de toestand die de basis vormt van de (onbekende) toestandsvariabele afhangt van de voorgaande toestanden en de invoer welke het proces tot dan toe ondergaan heeft. Deze invoer wordt ook wel de besturing van het proces genoemd. We veronderstellen dat er een functioneel verband bestaat tussen de toestanden enerzijds en de begintoestand en besturing anderzijds. Nu hebben we bovendien de beschikking over waarnemingen van de uitvoer, een functie van de toestanden. Ook deze informatie zegt wat over de actuele waarden van de toestandsvariabelen en zo bestaat er de mogelijkheid iets over de toestanden te zeggen gegeven twee informatiebronnen.

We bespreken hier lineaire dynamische toestandruimtemodellen. Daarom gaan we er in het vervolg van uit dat de functionele verbanden lineair zijn en weer te geven zijn als lineaire afbeeldingen (zie definitie 6). Een eerste afbeelding die de invloed van de besturing op het systeem beschrijft, de besturingsruimte afbeeldt op de toestandruimte; een tweede afbeelding welke de invloed van een toestand op zijn opvolger beschrijft, een afbeelding van de toestandruimte in zichzelf; als derde en laatste één welke de waarneming van de toestandruimte beschrijft, dus een afbeelding van de toestandruimte op de waarnemingsruimte. We zullen deze afbeeldingen verder respectievelijk $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$ en $\mathbf{H}$ noemen, al dan niet tijdafhankelijk. Kiezen we de besturingssignaalruimte m-dimensionaal en de toestandruimte n-dimensionaal (dat wil zeggen in ieder geval eindig-dimensionaal) en de uitvoerruimte p-dimensionaal, dan krijgen we bijvoorbeeld het volgende model:

Voor elk tijdstip $t = 1, 2, \ldots$

Besturingsvector	$\mathbf{x}_t$	m-dimensionaal
Toestandsvector	$\mathbf{z}_t$	n-dimensionaal
Uitvoervector	$\mathbf{y}_t$	p-dimensionaal
Toestandstransitie matrix	$\mathbf{F}_t$	$n \times n$-dimensionaal
Beïnvloedingsmatrix	$\mathbf{D}_t$	$n \times m$-dimensionaal
Waarnemingsmatrix	$\mathbf{H}_t$	$p \times n$-dimensionaal

Nu is het model in formulevorm te schrijven als:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{F}_t(\mathbf{z}_{t-1}) + \mathbf{D}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t(\mathbf{z}_t) + \mathbf{v}_t \tag{2.2}$$

voor $t = 1, 2, \ldots$ met $\mathbf{w}_t$ en $\mathbf{v}_t$ fouttermen respectievelijk n- en p-dimensionaal. De termen $\mathbf{w}_t$ en $\mathbf{v}_t, t = 1, 2, \ldots$ worden beschouwd als zijnde onderling onafhankelijke stochastische grootheden met een verwachting gelijk aan nul. In deze opzet is nog de mogelijkheid toegelaten dat de matrices $\mathbf{F}_t$, $\mathbf{D}_t$ en $\mathbf{H}_t$ met de tijd veranderen, maar dit geval zullen we niet bespreken. Wat overblijft heet een *stationair systeem.* Het stationaire zit in het feit dat de afbeeldingen en daarmee de matrices onveranderd blijven in de tijd. Dit omdat we aannemen dat ons systeem binnen een serie waarnemingen niet of verwaarloosbaar met de tijd verandert.

In de praktijk zullen we na het uitvoeren van een experiment beschikken over een serie besturings- en uitvoersignalen, de $\mathbf{x}_t$- en $\mathbf{y}_t$-vectoren, welke een 'voltrekking' van het proces voorstellen. Ook is het mogelijk dat we beschikken over een aantal onafhankelijke voltrekkingen van het proces, hetgeen dan leidt tot meer series waarnemingen. Deze gegevens zullen naar aanleiding van een bepaald optimaliteitscriterium een schatting opleveren van de matrices $\mathbf{F}$, $\mathbf{D}$ en $\mathbf{H}$ en van alle toestandsvectoren.

Laat een experiment tot het volgende 'geschatte' model leiden:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{F}(\mathbf{z}_{t-1}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_t) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}(\mathbf{z}_t) \tag{2.4}$$

Met $t = 1, 2, \ldots$. Nu rijst de vraag: wat kunnen we er mee doen? Om te beginnen twee toepassingen:

i. Zuivere analyse van een proces ('Hoe lijkt het te werken ?').

ii. Gegeven een analyse het voorspellen van het gedrag van een proces onder bepaalde omstandigheden.

Ten behoeve van het eerste onderdeel beginnen we met voorstellen ter interpretatie van de matrices $\mathbf{F}$, $\mathbf{D}$ en $\mathbf{H}$ en het vermelden van een aantal eigenschappen waaraan een oplossing dient te voldoen.

2.2 De matrix F (transitiematrix)

De matrix $\mathbf{F}$, ook de transitiematrix genoemd, neemt een centrale positie in. Voor iedere $\mathbf{z}$, element uit de toestandruimte, is er een 'factor' zodat:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{z})\| = \text{factor} \times \|\mathbf{z}\|.$$

Nu kunnen we de toestandruimte opdelen in vier gedeelten, in oplopende grootte van 'factor', te weten:

i. Die vectoren waarvoor 'factor' erg klein is. Dit is gelijk de quasikern (zie definitie 7) van de afbeelding $\mathbf{F}$. Zeg 'factor' kleiner of gelijk aan epsilon.

ii. Niet (i), maar waarvoor 'factor' voldoende kleiner dan 1 is.

iii. Niet (i) of (ii), maar waarvoor 'factor' ongeveer gelijk is aan 1, maar altijd kleiner dan 1.

iv. Waarvoor 'factor' tenminste gelijk aan 1 is. Dit zijn vectoren waarvan de norm niet kleiner wordt na afbeelding door **F**. Dit houdt in dit geval in dat de vectoren niet kleiner worden, daar **F** van de toestandruimte in de toestandruimte afbeeldt.

Aan de hand van deze indeling kunnen we de toestandruimte onderverdelen in vier (op de oorsprong na) disjuncte deelruimten, en iedere toestand ontbinden in bijbehorende vier factoren:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4.$$

Een belangrijk geval is als de laatste categorie (iv) niet bestaat, dat is het geval als de norm van **F**, $||\mathbf{F}||$, kleiner dan 1 is. Dan is gegarandeerd dat het effect van ieder besturingssignaal op den duur uitsterft. In dat geval krijgen we de volgende indeling van de verzameling V van besturingssignalen:

(a) Als $v \in V$ een element uit (i) is zal het effect van v op de toestand van het systeem op tijdstip t_2 te verwaarlozen zijn. De besturingssignalen die door **D** op (i) worden afgebeeld hebben dus een zeer kortstondige invloed op de toestand van het systeem.

(b) De besturingssignalen die door **D** op (ii) worden afgebeeld hebben een langduriger, eventueel beperkte, invloed.

(c) De besturingssignalen die door **D** op (iii) worden afgebeeld hebben een schijnbaar onbeperkt voortdurende invloed op het systeem. Een effect van een dergelijk signaal kan alleen door een ander signaal teniet gedaan worden.

(d) De besturingssignalen die door **D** op (iv) worden afgebeeld zullen in invloed steeds toenemen. Dit kan tot gevolg hebben dat het systeem 'uit de hand' loopt als er niet (systematisch) gecompenseerd wordt.

Otter (1986) vereist dat de eigenwaarden van **F** kleiner zijn dan één. Otter noemt het model dan 'stabiel'. Deze eis behoeft op dit punt niet te worden gesteld, een verkeersproces zal niet altijd stabiel zijn (ongevallen), maar onder bepaalde schattingsprocedures zal het belangrijk zijn te letten op deze eigenschap.

2.3 Invloed begintoestand en invoer in de toekomst

Stel, zonder beperking van de algemeenheid, op tijdstip t_0 is de toestand van het systeem $\mathbf{z}_0$. Stel het besturingssignaal op elk tijdstip $t > t_0$ is $\mathbf{x}$, dan krijgen we volgens (2.3):

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{x}). \tag{2.5}$$

Interessant is nu hoe het systeem onder invloed van de begintoestand $\mathbf{z}_0$ en het besturingssignaal X zich in de tijd ontwikkelt. De toestand op tijdstip t_2 is nu:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_1) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) + \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0)) \end{aligned}$$

Op dit tijdstip is de invloed van $\mathbf{z}_0$ op tijdstip t_2 gelijk aan $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0))$. De toestand op tijdstip t_3 wordt nu:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_3 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) + \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_1)) \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) + \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x}))) + \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0))) \end{aligned}$$

Op dit tijdstip is de invloed van $\mathbf{z}_0$ op tijdstip t_3 gelijk aan $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0)))$. In het algemeen is de invloed $\mathbf{z}_0$ op tijdstip t_n gelijk aan: $V = \mathbf{F}^n(\mathbf{z}_0)$.

Dit betekent dat als $||\mathbf{F}||$ kleiner is dan 1, de invloed van een signaal in de toekomst altijd weer wegebt. Namelijk: Stel $r = ||\mathbf{F}||$ dan geldt:

$$||\mathbf{F}(\mathbf{z}_0)|| \leq r \times ||\mathbf{z}_0||$$

en

$$||\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0))|| \leq r \times ||\mathbf{F}(\mathbf{z}_0)|| \leq r \times r \times ||\mathbf{z}_0||.$$

In het algemeen:

$$||\mathbf{F}^n(\mathbf{z}_0)|| \leq r^n \times ||\mathbf{z}_0||.$$

Dit resultaat wijst ons dat het effect van de begintoestand, als $||\mathbf{F}|| < 1$, op den duur minimaal wordt, op langere termijn zelfs verwaarloosbaar. Deze afleiding is uiteraard ook te maken voor het effect van de toestand op een willekeurig tijdstip op de toestand in de toekomst.

Laten we nu het effect onderzoeken van het systematisch één besturingssignaal toevoegen aan een systeem. Dat wil zeggen vanaf tijdstip t_0 wordt het proces, schijnbaar, eindeloos het besturingssignaal $\mathbf{x}$ aangeboden. We krijgen wederom:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{x}). \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_1) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0)) + \mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}_3 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_1)) + \mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{z}_0))) + \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x}))) + \mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dit levert een algemene gedaante voor $\mathbf{z}_N$:

$$\mathbf{z}_N = \mathbf{F}^N(\mathbf{z}_0) + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}^k \mathbf{D}(\mathbf{x}).$$

ofwel

$$\mathbf{z}_N = \mathbf{F}^N(\mathbf{z}_0) + \{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}^{N-k}\mathbf{D}\}(\mathbf{x}).$$

Voor een bespreking van van de situatie voor $N \to \infty$, zie par 2.6.

2.4 De matrix H (waarnemingsmatrix, meetmatrix)

De matrix **H** kan men zien als de waarnemingsmatrix van het proces. **H** is het instrument waarmee wij de toestanden waarnemen. Het is logisch dat we geïnteresseerd zijn in de wijze waarop **H** het 'zicht' op de toestandruimte deformeert. Hier is de (quasi)kern interessant (zie definitie 7): de toestanden welke in de kern van **H** zitten zullen niet of nauwelijks waarneembaar zijn. Dit effect zou men kunnen vergelijken met het bekijken van een foto van sterren. Men kan in dat geval geen diepte meer zien, doch men ziet alles in een vlak. Als de (quasi)kern van **H** meer bevat dan alleen de nulvector dan heeft dit als belangrijk gevolg dat een beeld van **H** oneindig veel verschillende originelen heeft. De diepte is weg, alles heeft de zelfde diepte. Dit is als volgt in te zien: als de vector v in de (quasi)kern van **H** zit wordt zijn beeld onder **H** verondersteld verwaarloosbaar te zijn, dat wil zeggen:

$$\mathbf{H}(v) \approx 0$$

Nu is **H** een lineaire afbeelding, dus geldt:

$$\mathbf{H}(\mathbf{z} + v) = \mathbf{H}(\mathbf{z}) + \mathbf{H}(v) \approx \mathbf{H}(\mathbf{z}).$$

dit betekent dat, als $y = \mathbf{H}(\mathbf{z})$ en we nemen $\mathbf{y}$ waar, het niet vaststaat dat de toestand $\mathbf{z}$ is (zou ook $\mathbf{z}+v$ of $\mathbf{z}-v$ kunnen zijn). Dit zou kunnen betekenen dat we, onder omstandigheden, niet in staat zullen zijn uit te maken in welke toestand het systeem zich bevindt. Of dit een probleem zal zijn zal van andere zaken afhangen.

Definitie 1 Een systeem heet *observeerbaar* als voor iedere gegeven input x_t voor $t \geq t_0$ en voor iedere begintijd t_0, de begintoestand z_{t_0} éénduidig bepaald kan worden uit de uitvoer y_t voor $t_0 \leq t < t_1$ met t_1 eindig.

Stelling 1 Een lineair systeem heet *observeerbaar* als de rang van de matrix

$$\left(H^T \mid (HF)^T \mid (HF^2)^T \mid \cdots \mid (HF^{n-1})^T\right)^T$$

gelijk is aan de dimensie van de toestandruimte ($=n$ in bovenstaande formule).

De uitvoervectoren van het systeem zullen in het algemeen metingen voorstellen, waarnemingen van de uitvoer van het proces. Per tijdstip zullen de componenten van de vectoren waarschijnlijk bepaalde aspecten van de uitvoer op dat zelfde tijdstip voorstellen, bijvoorbeeld één component voor het totale aantal ongevallen, één component voor het aantal ongevallen met zwaar verkeer, enzovoort. Nu zou men aan de matrix **H** kunnen zien hoe deze individuele componenten van de toestandruimte afhangen. Deze absolute benadering zal niet altijd veel zin hebben. Men zal waarschijnlijk eerder geïnteresseerd zijn in de (relatieve) overeenkomst of het (relatieve) verschil in mate en vorm van de verbanden tussen de toestand en de individuele componenten van de uitvoer. Componenten die veel 'op elkaar lijken' zullen een overeenkomstig verband hebben met de toestand van het systeem, 'onderling onafhankelijke' componenten juist niet. Wel zal het nodig zijn een maat voor deze samenhang te formuleren. Men kan voor dit doel een canonische-correlatie-analyse op de toestandruimte en de uitvoerruimte doen. Hierbij neemt men als observaties in de ene set de toestandvectoren en in de andere set de uitvoervectoren. Dit middel kan ook een indicatie geven over de dimensionaliteit van de relatie tussen de toestandruimte en de uitvoerruimte door middel van het bestuderen van de canonische correlaties. Deze dimensionaliteit mag niet worden verward met de dimensionaliteit van de toestandruimte, die eenvoudig groter kan zijn dan de vorig genoemde.

2.5 De matrix D (beïnvloedingsmatrix)

Vervolgens een interpretatie van de matrix D. De matrix D zou men kunnen zien als de besturingsmatrix van het proces: alle besturingssignalen worden eerst door D getransformeerd. We zullen geïnteresseerd zijn in de individuele effecten van de diverse besturingssignalen op respectievelijk de toestand en de uitvoer van het systeem. Dit kan bijvoorbeeld noodzakelijk zijn ter afweging van interventie effecten, zoals bij Harvey (1985). Ten eerste kunnen we weer een analoge benadering als bij de matrix **H** kiezen. Het al dan niet toedienen van het signaal $\mathbf{x}$ op tijdstip t levert een vector $D(\mathbf{x})$ op als beïnvloeding van de toestand op tijdstip t. Bij een benadering met een beschikbare collectie vectoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ van besturingssignalen kan men op de beelden onder D van deze vectoren, $D(\mathbf{x}_1), \ldots, D(\mathbf{x}_k)$, een (principale componenten) analyse uitvoeren. Dit heeft onder andere tot doel inzicht te verkrijgen in een eventuele structuur in de beïnvloeding. Sommige besturingssignalen zullen een gelijkwaardige beïnvloeding veroorzaken, andere juist niet, sommige hebben misschien een heel bijzonder effect. Op een dergelijke wijze kan men het model gebruiken om een indeling in de effecten van verschillende maatregelen te verkrijgen. Deze werkwijze is uiteraard slechts te gebruiken als het aantal besturingssignalen voldoende groot is. In analogie met de definities van observeerbaarheid is er ook een (algemeen aanvaarde) definitie voor *controleerbaarheid.*

Definitie 2 Een systeem heet *controleerbaar* als het voor iedere begintoestand z_0 naar iedere eindtoestand z_1 gebracht kan worden door middel van een eindig aantal besturingssignalen x_t voor $t_0 \leq t < t_1$, met $t_1 < \infty$ (z_{t_0} is z_0 en z_{t_1} is z_1).

Stelling 2 Een lineair systeem is *controleerbaar* als de rang van de matrix

$$\left(D \mid FD \mid F^2D \mid \cdots \mid F^{n-1}D\right)$$

gelijk is aan de dimensie van de toestandruimte ($=n$ in bovenstaande formule).

2.6 Asymptotische matrix F en D.

Op dit punt merken we op, gegeven $||\mathbf{F}|| < 1$;

i. Als het proces langdurig het zelfde besturingssignaal ontvangt, komt het proces onafhankelijk van de begintoestand in één slechts door het besturingssignaal bepaalde toestand terecht. Dit komt doordat de bijdrage $\mathbf{F}(\mathbf{z}_0)$ bij groot wordende N verwaarloosbaar wordt. Deze eindtoestand het beeld is van een lineaire afbeelding van de besturingsruimte op de toestandruimte, gedefinieerd door:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}^k \mathbf{D} \tag{2.6}$$

De uitvoer in de eindtoestand is nu $\mathbf{H}(\mathbf{M}(\mathbf{x}))$, ook weer een lineaire afbeelding. Volgens deze theorie zal dus de uitvoer van het proces, gegeven beperkingen door $\mathbf{HM}$, een willekeurige waarde kunnen aannemen.

ii. Als wij twee processen vergelijken willen welke reeds lange tijd verlopen, is het natuurlijk aantrekkelijk dat we mogen aannemen dat de begintoestand, of hier eigenlijk: de niet waargenomen periode voor het begin van het onderzoek, op den duur niet meer van invloed is op de toestand van het systeem. Dit gegeven zou men kunnen gebruiken als men zou willen aantonen dat twee processen niet aan elkaar gelijk zijn.

Resteert ons nog te kijken naar het verband 'in het oneindige', zoals geformuleerd met de matrix $\mathbf{M}$. Via een meer dan de oorsprong bevattende kern van $\mathbf{M}$ zullen wij in staat zijn variaties in de besturing van ons systeem aan te brengen zonder dat het systeem in een andere toestand terecht zal komen. Dit is in ieder geval zo als de variatie in de kern van $\mathbf{D}$ 'zit', dat wil zeggen dat bij twee alternatieve signalen a en b de vector $a - b$ (is de variatie) in de kern van $\mathbf{D}$ zit, maar op den duur ook zo als $a - b$ in de kern van $\mathbf{M}$ zit. Meest interessant is het natuurlijk als de variatie in de kern van $\mathbf{HM}$ zit, dit heeft tot gevolg dat een variatie van het signaal op den duur niet aan het uitvoersignaal waar te nemen is. Deze beschouwingen lijken vooral interessant als er nog andere gronden zijn om te kiezen tussen besturingssignalen. Een voorbeeld hiervan is een macroscopisch verkeersmodel, waarbij men probeert verschillende alternatieve maatregelen af te wegen om een bepaald effect te bereiken, bijvoorbeeld het aantal verkeersslachtoffers te doen afnemen. Hierbij is de matrix $\mathbf{HM}$ natuurlijk interessant. Stel de waargenomen uitvoer is $\mathbf{y}$, dan wordt een vector $\mathbf{x}$ gezocht zodat $\mathbf{HM}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ en men kan bij $\mathbf{x}$ iedere vector uit de kern van $\mathbf{HM}$ optellen zonder dat het eindresultaat beïnvloed wordt. De tussenliggende toestanden kunnen wel beïnvloed worden. Nu zal iedere maatregel geld kosten; men kan dus door met de kern variëren de goedkoopste variant kiezen.

2.7 Implementaties

In het voorgaande is een uiteenzetting gegeven van mogelijke interpretaties welke aan de systeemmatrices van een toestandruimte model gegeven kunnen worden. Naast deze uiteenzetting is een overzicht noodzakelijk over een aantal implementaties: genoemd is reeds die van Harvey (1985), welke over enkelvoudige tijdreeksen gaat. Het blijkt dat met een verruiming van de toestandruimte en een handig gekozen (niet geschatte) transitiematrix **F** enkelvoudige tijdreeksen als toestandruimtemodellen geschreven kunnen worden. Een belangrijke referentie hierbij is Akaike (1974).

Alternatief zijn modellen die wel uitgaan van een te schatten transitiematrix **F**. Een voor verkeersveiligheidsonderzoek interessante groep modellen is die welke ook in staat zijn een zekere transformatie toe te passen op categorische variabelen. Een voorbeeld is de methode van Bijleveld (1989) en een vervolg Bijleveld *et al.* (1991) waarin vooral op technische implementatie problemen wordt ingegaan.

Recent is ook een extensie naar 'meerweg'-toepassingen, dit houdt in dat aantallen systemen met een te specificeren overeenkomst geschat kunnen worden. Een voorstel hiertoe is gedaan door Verboon & Heiser (1990). Toepassigen liggen hier bijvoorbeeld in situaties waarin diverse proefpersonen bij het uitvoeren van een gelijke taak bestudeerd worden. Vooral bij conflictobservaties lijkt hier een toepassing te liggen, maar ook het onderzoek naar de verplaatsingsprofielen lijkt met een dergelijk model gebaat.

3 Optimale keuze van gewichten voor twee schatters

Stel we beschikken over twee bronnen waaruit we informatie putten met betrekking tot één of andere grootheid. We veronderstellen dat beide bronnen ieder een meting opleveren welke niet exact is. We veronderstellen verder dat de fout die optreedt toevallig is en een normale verdeling volgt. Uit beide metingen willen we nu een nieuwe meting synthetiseren welke nauwkeuriger is dan beide aanvankelijke. Deze situatie is een generalisatie van het middelen van een aantal waarnemingen. Eerst zal een één- en later een meer-dimensionale oplossing worden afgeleid. Dit alles als inleiding van de afleiding van het zogenaamde *Kalmanfilter*. In het vervolg zullen we de metingen telkens schattingen noemen.

3.1 De één-dimensionale situatie

Stel we beschikken over twee in hun fout onafhankelijke schatters voor een zekere parameter. We noemen de schatters $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$. Beide schatters worden verondersteld zuiver te zijn voor de parameter $\mathbf{z}$, dus:

$$E(\hat{\mathbf{x}}) = z$$
$$E(\hat{\mathbf{y}}) = z$$

Verder stellen we

$$\sigma^2(\hat{\mathbf{x}}) = p$$
$$\sigma^2(\hat{\mathbf{y}}) = r$$

We willen nu een zuivere schatter $\hat{\mathbf{z}}$ construeren uit een lineaire combinatie van $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$ zo dat het resultaat een minimale variantie heeft. We doen dit via een variabele $\mathbf{k}$ zodat:

$$\hat{\mathbf{z}} = (1-\mathbf{k})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\hat{\mathbf{y}}$$

hetgeen betekent dat het resultaat zuiver is:

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{z}}) &= (1-\mathbf{k})E(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{k}E(\hat{\mathbf{y}}) = \\ &= (1-\mathbf{k})z + \mathbf{k}z = z \end{aligned}$$

$E(\hat{\mathbf{z}}) = z$, dus $\hat{\mathbf{z}}$ is een zuivere schatter van $\mathbf{z}$. (Dit is overigens niet verbazingwekkend.) Vervolgens moet een uitdrukking voor $\mathbf{k}$ gevonden worden zodat $\sigma^2(\hat{\mathbf{z}})$ minimaal is, gegeven de varianties van $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$:

$$\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}) = \sigma^2((1-\mathbf{k})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\hat{\mathbf{y}}) =$$

Daar $\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = 0$ volgt

$$\begin{aligned} &= \sigma^2((1-\mathbf{k})\hat{\mathbf{x}}) + \sigma^2(\mathbf{k}\hat{\mathbf{y}}) = \\ &= (1-\mathbf{k})^2\sigma^2(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{k}^2\sigma^2(\hat{\mathbf{y}}) = \qquad (3.1) \\ &= p - 2p\mathbf{k} + (p+r)\mathbf{k}^2 \end{aligned}$$

Een vluchtige blik op (3.1) laat zien dat een keuze van $\mathbf{k}$ buiten $(0,1)$ zinloos is daar de variantie van de gesynthetiseerde schatter groter wordt dan één van de oorspronkelijke schatters. $\sigma^2(\hat{\mathbf{z}})$ als functie van $\mathbf{k}$ heeft dus één minimum als $p+r>0$, afgezien van het triviale geval dat $p+r=0$ is dat altijd zo, en is minimaal als:

$$2(p+r)\mathbf{k}-2p=0 \Longrightarrow \mathbf{k}=\frac{p}{(p+r)}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}) &= p-\frac{2p^2}{(p+r)}+(p+r)\frac{p^2}{(p+r)^2}= \\ &= p-\frac{p^2}{(p+r)}= \\ &= \frac{pr}{(p+r)}\end{aligned}$$

Of, als alternatief:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}) &= p(1-\mathbf{k}) \\ \sigma^2(\hat{\mathbf{z}}) &= r\mathbf{k}\end{aligned}$$

waaruit, gezien dat geldt $0<\mathbf{k}<1$ volgt dat:

$$\sigma^2(\hat{\mathbf{z}})\le\sigma^2(\hat{\mathbf{x}})$$

en

$$\sigma^2(\hat{\mathbf{z}})\le\sigma^2(\hat{\mathbf{y}})$$

Stel nu, we kennen $\sigma^2(\hat{\mathbf{x}})$ en of $\sigma^2(\hat{\mathbf{y}})$ niet zo goed, en we kiezen $\mathbf{k}^*\in(0,1)$ in plaats van $\mathbf{k}$, met $\delta=\mathbf{k}^*-\mathbf{k}$ dan heeft dit tot gevolg:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}^*) &= p-2p\mathbf{k}^*+(p+r)\mathbf{k}^{*2}= \\ &= p-2p\mathbf{k}+(p+r)\mathbf{k}^2-2\delta p+2\delta\mathbf{k}(p+r)+\delta^2(p+r)=\end{aligned}$$

daar $\mathbf{k}=p/(p+r)$

$$=\sigma^2(\hat{\mathbf{z}})+\delta^2(p+r)$$

Daar $0<\delta<1$ kan men nu reeds met behulp van het voorgaande een schatting van $\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}^*)$ maken. Deze schatting kan scherper, $p-2p\mathbf{k}^*+(p+r)\mathbf{k}^{*2}$ als functie van $\mathbf{k}^*$ is een dalparabool en neemt dus zijn maxima aan op de randen ($\mathbf{k}^*=0$ of $\mathbf{k}^*=1$). Dit betekent:

$$\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}^*)\le\max(\sigma^2(\hat{\mathbf{x}}),\sigma^2(\hat{\mathbf{y}}))$$

Stel $\sigma^2(\hat{\mathbf{x}})<\sigma^2(\hat{\mathbf{y}})$; om nu te zorgen dat $\sigma^2(\hat{\mathbf{z}}^*)<\sigma^2(\hat{\mathbf{x}})$ moet gelden dat $0<\mathbf{k}^*$ en $\mathbf{k}^*<2\sigma^2(\hat{\mathbf{x}})/(\sigma^2(\hat{\mathbf{x}})+\sigma^2(\hat{\mathbf{y}}))$, met andere woorden $0<\mathbf{k}^*<2\mathbf{k}$. Hieruit kan worden geconcludeerd dat de keuze van $\mathbf{k}$ niet al te gevoelig is. Het is eveneens interessant de residuen te onderzoeken onder invloed van $\mathbf{k}$, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}} = \\
&= (1-\mathbf{k})(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}) \\
E(\hat{\mathbf{r}}) &= (1-\mathbf{k})E(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}) = 0 \\
\sigma^2(\hat{\mathbf{r}}) &= (1-\mathbf{k})^2\sigma^2(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}) = \\
&= (1-k)^2(\sigma^2(\hat{\mathbf{y}}) + \sigma^2(\hat{\mathbf{x}})) =
\end{aligned}$$

daar:

$$1 - \mathbf{k} = \frac{\sigma^2(\hat{\mathbf{y}})}{(\sigma^2(\hat{\mathbf{y}}) + \sigma^2(\hat{\mathbf{x}}))}$$

volgt:

$$= (1-\mathbf{k})\sigma^2(\hat{\mathbf{y}})$$

(Het andere residu wordt op analoge wijze afgeleid)

Opgemerkt moet worden dat $\sigma^2(\hat{\mathbf{z}})+\sigma^2(\hat{\mathbf{r}}) = \sigma^2(\hat{\mathbf{y}})$. Dit geldt overigens alleen bij de optimale keuze van $\mathbf{k}$.

3.2 De meer-dimensionale situatie

$\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ en $\hat{\mathbf{z}}$ zijn nu n-dimensionale vectoren, $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$ worden verondersteld onafhankelijk van elkaar te zijn, doch de onderlinge componenten van $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$ worden verondersteld niet onafhankelijk te zijn. Zou dat het geval zijn dan is het mogelijk het één-dimensionale geval n-keer te herhalen. Stel:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mathbf{x}}) &= E(\hat{\mathbf{y}}) = z \\
\mathbf{Cov}\ (\hat{\mathbf{x}}) &= P, \text{ covariantiematrix} \\
\mathbf{Cov}\ (\hat{\mathbf{y}}) &= R, \text{ idem}
\end{aligned}$$

We willen nu weer een voor iedere component zuivere schatter construeren zo dat de som van de varianties van de componenten van $\hat{\mathbf{z}}$ minimaal is. Het zal blijken dat dat ook betekent dat de individuele componenten een minimale variantie hebben. We beginnen weer met de constructie analoog met het één-dimensionale geval:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{z}} &= (I - \mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{y}}. \\
E(\hat{\mathbf{z}}) &= (I - \mathbf{K})E(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}E(\hat{\mathbf{y}}) = z. \\
\mathbf{Cov}\ (\hat{\mathbf{z}}) &= (I - \mathbf{K})\,\mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{x}})(I - \mathbf{K})^T + \mathbf{K}\,\mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{y}})\mathbf{K}^T
\end{aligned}$$

Een element van het spoor van $\mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{z}})$, c_{ii} is als volgt gedefinieerd:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(I_{ik} - \mathbf{K}_{ik})P_{kj}(I_{ji}^T - \mathbf{K}_{ji}^T) + \mathbf{K}_{ik}R_{kj}\mathbf{K}_{ji}^T] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(I_{ik} - \mathbf{K}_{ik})P_{kj}(I_{ij} - \mathbf{K}_{ij}) + \mathbf{K}_{ik}R_{kj}\mathbf{K}_{ij}] = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I_{ik}P_{kj}I_{ij} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}P_{kj}I_{ij} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I_{ik}P_{kj}\mathbf{K}_{ij} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}(R_{kj} + P_{kj})\mathbf{K}_{ij} = \\
&= P_{ii} - 2\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\mathbf{K}_{ij} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}(R_{kj} + P_{kj})\mathbf{K}_{ij}
\end{aligned}
$$

In c_{ii} komt slechts één rij van $\mathbf{K}$ voor, en wel rij i, dus kan ieder element van het spoor onafhankelijk van elkaar geminimaliseerd worden met betrekking tot $\mathbf{K}$:

$$
\frac{\partial c_{ii}}{\partial \mathbf{K}_{im}} = -2P_{im} + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}(P_{km} + R_{km})
$$

Dit is een positieve kwadratische vorm, dat heeft tot gevolg dat het spoor minimaal is wanneer $\partial c_{ii}/\partial \mathbf{K}_{im} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ en $m = 1, \ldots, n$. Dus:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{ik}(P_{km} + R_{km}) &= P_{im} \; i = 1, \ldots, n \; en \; m = 1, \ldots, n \\
\mathbf{K}(P + R) &= P
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt al dat $\mathbf{K}$ een symmetrische matrix moet zijn. Daar P en R covariantiematrices zijn van variabelen die niet beide een variantie van nul hebben, ofwel tenminste één matrix is definiet positief, is $\mathbf{K}$ voldoende gedefinieerd door:

$$
\mathbf{K} = P(P + R)^{-1}
$$

Reeds gezien was:

$$
\mathbf{Cov}\ (\hat{\mathbf{z}}) = (I - \mathbf{K})\,\mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{x}})(I - \mathbf{K})^T + \mathbf{K}\,\mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{y}})\mathbf{K}^T
$$

Dit betekent dat:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cov}\ (\hat{\mathbf{z}}) &= (I - \mathbf{K})P(I - \mathbf{K})^T + \mathbf{K}R\mathbf{K}^T = \\
&= P - \mathbf{K}P - P\mathbf{K}^T + \mathbf{K}(P + R)\mathbf{K}^T = \\
&= P - \mathbf{K}P - P\mathbf{K}^T + [P(P + R)^{-1}](P + R)\mathbf{K}^T = \\
&= P - \mathbf{K}P = \\
&= (I - \mathbf{K})P = \\
&= R(P + R)^{-1}P = \\
&= P(P + R)^{-1}R = \\
&= \mathbf{K}R
\end{aligned}
$$

Om aan te tonen dat deze oplossing ook een verbetering in variantie oplevert, tonen we aan dat iedere willekeurige lineaire combinatie van componenten van $\hat{\mathbf{y}}$ een grotere variantie heeft dan diezelfde combinatie van componenten van $\hat{\mathbf{z}}$. De varianties van $a^T\hat{\mathbf{y}}$ respectievelijk $a^T\hat{\mathbf{z}}$ zijn a^TRa en $a^T(P(P+R)^{-1}Ra)$,

$$a^T(P(P+R)^{-1}Ra) = a^T(P(P+R)^{-1})Ra.$$

Met $P(P+R)^{-1}$, ofwel $\mathbf{K}$, symmetrisch, dus

$$a^T(P(P+R)^{-1})Ra = \mathbf{K}a^TRa$$

Stel $b = Ra$, dan wordt het probleem gereduceerd tot de vraag of $\mathbf{K}a^Tb$ al dan niet kleiner is dan a^Tb en daarmee de vraag of de norm van $\mathbf{K}$ kleiner is dan 1 of niet. Herhaling van: $\mathbf{K}(P+R) = P$ levert:

$$||\mathbf{K}|| \times ||P+R|| = ||P|| \Longrightarrow ||\mathbf{K}|| = \frac{||P||}{||P+R||}$$

Dus $||\mathbf{K}|| < 1$. Op analoge wijze als in het één-dimensionale geval leiden we nog de residuen af:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}} = \\
&= (I-\mathbf{K})(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}). \\
E(\hat{\mathbf{r}}) &= (I-\mathbf{K})E(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}) = 0 \\
\mathbf{Cov}\ (\hat{\mathbf{r}}) &= (I-\mathbf{K})(P+R)(I-\mathbf{K})^T = \\
&= R(I-\mathbf{K})^T = \\
&= (I-\mathbf{K})R
\end{aligned}$$

Dus ook in het meer-dimensionale geval geldt: $\mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{Cov}\,(\hat{\mathbf{z}})$.

4 Toestandruimtemodellen en Kalmanfiltering

4.1 Definitie van het filter

We gebruiken nu de vorige hoofdstukken om het zogenaamde Kalmanfilter af te leiden. We herhalen uit par. 2.1 de vergelijkingen (2.1) en (2.2):

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{F}_t(\mathbf{z}_{t-1}) + \mathbf{D}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t(\mathbf{z}_t) + \mathbf{v}_t \tag{2.2}$$

Voor $t = 1, 2, \ldots$ We nemen weer aan dat $\mathbf{F}$, $\mathbf{D}$ en $\mathbf{H}$ niet variëren in de tijd, en in het bijzonder niet stochastisch bepaald zijn. In de oorspronkelijke benadering is het Kalmanfilter gebruikt voor een optimale schatter van de uitvoer $\mathbf{y}_t$, doch we zullen een variant van het filter afleiden voor de toestand $\mathbf{z}_t$, gegeven de vorige toestand en de invoer aan de ene kant, en de uitvoer aan de andere kant. We formuleren twee nieuwe definities:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{t|t-1} &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_{t-1}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_t) \\ \mathbf{z}_{t|\mathbf{y}_t} &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{y}_t) \end{aligned}$$

$\mathbf{z}_{t|t-1}$ noemen we ook de voorspelling van $\mathbf{z}_t$ gegeven $t-1$ en $\mathbf{z}_{t|\mathbf{y}_t}$ zullen we ook de 'update' van $\mathbf{z}_t$ noemen. Voorts:

$$\begin{aligned} P_{t|t-1} &= \mathbf{Cov}\ (\mathbf{z}_{t|t-1}) \\ R &= \mathbf{Cov}\ (\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{y}_t))\ \ [= \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{Cov}\,(\mathbf{v}_t)(\mathbf{H}^{-1})^T] \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ook nemen we aan dat alle fouttermen in (2.1) en (2.2) onafhankelijk van elkaar zijn en een verwachting van nul hebben. Wel kunnen, in het meer-dimensionale geval, de componenten onderling afhankelijk zijn. Ook nemen we aan dat de verdelingen van deze componenten niet in de tijd veranderen. We zullen nu voor ieder tijdstip t de volgende stappen uitvoeren:

$$\mathbf{z}_{t|t} = (I - \mathbf{K}_t)\mathbf{z}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\mathbf{z}_{t|\mathbf{y}_t} \tag{4.2}$$

waarbij $\mathbf{z}_{t|t}$ de gefilterde schatting van $\mathbf{z}_t$ voorstelt. In (2.1) moet nu nog $\mathbf{z}_t$ met $\mathbf{z}_{t|t}$ gesubstitueerd worden:

$$\mathbf{z}_{t|t} = (I - \mathbf{K}_t)(\mathbf{F}\mathbf{z}_{t-1|t-1} + \mathbf{D}\mathbf{x}_t) + \mathbf{K}_t\mathbf{z}_{t|\mathbf{y}_t}$$

met:

$$\mathbf{K}_t = P_{t|t-1}(P_{t|t-1} + R)^{-1}$$

Het lijkt nuttig de constructie van $P_{t|t-1}$ nader uit te splitsen, nl:

$$P_{t|t-1} = \mathbf{F}\,\mathbf{Cov}\,(\mathbf{z}_{t-1|t-1})\mathbf{F}^T + \mathbf{D}\mathbf{x}_t + \mathbf{Cov}\,(\mathbf{w}_t) =$$

$$= \mathbf{F}\mathbf{K}_{t-1}R\mathbf{F}^T + Q$$

Dus

$$\mathbf{K}_t = (\mathbf{F}\mathbf{K}_{t-1}R\mathbf{F}^T + Q)(\mathbf{F}\mathbf{K}_{t-1}R\mathbf{F}^T + Q + R)^{-1} \tag{4.3}$$

Als laatste nog een opmerking over de situatie wanneer één van de schatters ontbreekt. Deze situatie wordt opgevangen door $\mathbf{K}_t$ op nul dan wel de identiteit te stellen, al naar gelang de uitvoer y_t dan wel de invoer x_t of de vorige toestand z_t op tijdstip t ontbreekt.

4.2 De ontwikkeling van $\mathbf{K}_t$ als $t \to \infty$

We beginnen op te merken dat voor alle $\mathbf{K}_t$ geldt dat $||\mathbf{K}_t|| \leq 1$ voor alle $t = 1, 2, \ldots$ en dus dat de oneindige rij $\mathbf{K}_t$ tenminste één verdichtingspunt moet hebben. Dit betekent dat er tenminste één limiet bestaat voor $\mathbf{K}_t$. Rest te bewijzen dat er slechts één verdichtingspunt bestaat voor $\mathbf{K}_t$.

Laat $\mathbf{K}_{t+1} := \Phi(\mathbf{K}_t)$ een iteratief proces voor $i = 1, 2, \ldots$ zijn, gedefinieerd als:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{K}_{t+1}) &= (\mathbf{F}\mathbf{K}_t\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q})(\mathbf{F}\mathbf{K}_t\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} + \mathbf{R})^{-1} \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{R}(\mathbf{F}\mathbf{K}_t\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} + \mathbf{R})^{-1}\end{aligned}$$

dan geldt:

$$||\Phi(\mathbf{K}_i) - \Phi(\mathbf{K}_j)|| = ||\mathbf{R}((\mathbf{F}\mathbf{K}_j\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} + \mathbf{R})^{-1} - (\mathbf{F}\mathbf{K}_i\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} + \mathbf{R})^{-1})||$$

Stel:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{F}\mathbf{K}_i\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} + \mathbf{R}. \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F}\mathbf{K}_j\mathbf{R}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} + \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}||\Phi(\mathbf{K}_i) - \Phi(\mathbf{K}_j)|| &= ||\mathbf{R}(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1})|| = \\ &= ||\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}|| = \\ &= ||\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_j)\mathbf{R}\mathbf{F}^T\mathbf{A}^{-1}|| \leq \\ &\leq ||\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}|| \; ||\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_j|| \; ||\mathbf{R}\mathbf{F}^T\mathbf{A}^{-1}||\end{aligned}$$

Dus $||\Phi(\mathbf{K}_i) - \Phi(\mathbf{K}_j)|| \leq \alpha||\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_j||$ met $0 < \alpha < 1$ als $||\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}|| \; ||\mathbf{R}\mathbf{F}^T\mathbf{A}^{-1}|| < 1$. Dit laatste is het geval als $||\mathbf{F}|| < 1$. Dit leidt tot het bijzonder resultaat dat $||\mathbf{K}_{t+1} - \mathbf{K}_t|| \leq \alpha||\mathbf{K}_t - \mathbf{K}_{t-1}|| \leq \alpha^i||\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0||$. Nu met $0 < n < m$ geldt:

$$\begin{aligned}||\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_n|| &\leq ||\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_{m-1}|| + \cdots + ||\mathbf{K}_{n+1} - \mathbf{K}_n|| \leq \\ &\leq \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1})||\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0|| <\end{aligned}$$

$$< \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) ||\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0||$$

Met $||\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0|| \leq 2$. De factor $\alpha^n/(1-\alpha)$ is kleiner dan iedere $\epsilon > 0$ te krijgen als $n \to \infty$. Het gevolg hiervan is dat $\{\mathbf{K}_t\}$ een Cauchyrij is en een limiet heeft. Daar $\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{K}_t\mathbf{R}$ volgt hieruit meteen dat ook $\mathbf{P}_{t|t}$ convergeert naar een limiet. We herhalen vergelijking (4.3):

$$\mathbf{K}_t = (\mathbf{F}\mathbf{K}_{t-1}R\mathbf{F}^T + Q)(\mathbf{F}\mathbf{K}_{t-1}R\mathbf{F}^T + Q + R)^{-1} \tag{4.3}$$

Daar de rij $\mathbf{K}_t$ naar één limiet $\mathbf{K}$ convergeert, moet daarvoor gelden:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{F}\mathbf{K}R\mathbf{F}^T + Q)(\mathbf{F}\mathbf{K}R\mathbf{F}^T + Q + R)^{-1}$$

Dit betekent overigens dat onder omstandigheden het model behoorlijk te benaderen zal zijn met een model met één enkele waarde voor $\mathbf{K}$.

5 Constructie van het 'filter' volgens statespace

Bij de *statespace* benadering is gekozen de matrix **K** te benaderen met behulp van een diagonaal matrix. Een diagonaal matrix is namelijk aanmerkelijk eenvoudiger te inverteren dan een vierkante, zij het symmetrische matrix.

Hoewel verwarrend, gebruiken we zowel voor **K** als zijn benadering het zelfde symbool, alleen is de benadering nu een vector. Een aanvankelijke doelstelling was dat de benadering in het één-dimensionale geval dezelfde oplossing zou leveren als zijn origineel.

Voor ieder tijdstip t geldt nu (zie vergelijking (4.2)):

$$z_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t) z_{t|t-1} + \mathbf{K}_t z_{t|y_t} \tag{4.2}$$

Dit geldt ook voor tijdstip 1, maar $P_{t|t-1}$ (vergelijking (4.1)) wordt voor het tijdstip $t = 1$ gelijk aan oneindig gesteld. Dientengevolge wordt $\mathbf{K}_1 = \mathbf{I}$ en wordt z_1 uitsluitend bepaald door y_1 en $\mathbf{H}$. Dit heeft bovendien tot gevolg dat x_1 irrelevant wordt. (Dit kan onder de omstandigheid dat in x_1 een variabele een unieke categorie heeft tot problemen leiden). Deze situatie kan zich ook voor andere tijdstippen voordoen als er sprake is van discontinuïteiten.

Daar:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{dim(z)} \mathbf{H}_{ik} \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}_{jk} y_{j,t} &= \sum_{k=1}^{dim(z)} \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}_{ik} \mathbf{H}_{jk} y_{j,t} = \\
&= \sum_{j=1}^{dim(y)} \left(\sum_{k=1}^{dim(z)} \mathbf{H}_{ik} \mathbf{H}_{jk} \right) y_{j,t} = \\
&= \sum_{j=1}^{dim(y)} \delta_{ij} y_{j,t} = \\
&= y_{i,t}
\end{aligned}$$

wegens:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{als } i = j \\ 0, & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

geldt nu dat een minimum van:

$$ssq_{meet(t)} = \sum_{i=1}^{dim(y)} (y_{i,t} - \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{H}_{ij} z_{j,t|t})^2 \tag{5.1}$$

automatisch een minimum is van:

$$ssq_{systeem(t)} = \sum_{i=1}^{dim(z)} (z_{i,t|t} - \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}_{ji} y_{j,t})^2$$

ofwel:

$$ssq_{systeem*(t)} = \sum_{i=1}^{dim(z)} (z_{i,t|t} - z_{i,t|y_t})^2 \tag{5.2}$$

Dus door vergelijking (5.1) te minimaliseren, vinden we een $z_{t|y_t}$ optimaal voor vergelijking (5.2).

We zullen veronderstellen dat er sprake is van één ononderbroken keten van observaties x_t en y_t voor $t = 1, 2, \ldots, T$.

Nu gaan we niet vergelijking (5.1) minimaliseren maar:

$$ssq_{meet(t)} = \sum_{i=1}^{dim(y)} (y_{i,t} - \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{H}_{ij} z_{j,t|t-1})^2 \tag{5.3}$$

Samen met de vooraf geschilderde eigenschap van $\mathbf{H}$ en het gegeven dat de nieuwe $z_{t|t}$ een convexe combinatie is van $z_{t|t-1}$ en $z_{t|y_t}$ vergelijking (4.2) levert dat een minimalisatie op van zowel vergelijking (5.1) als vergelijking (5.2) op.

De constructie verloopt als volgt:

$f_x(i)$= verhouding tussen de variantie van de error in variabele x_i en de variantie van x_i. $f_y(i)$ is op analoge wijze gedefinieerd.

Als θ de vector van alle te schatten variabelen is, dan worden de volgende functies definiëerd: $(k = 1, 2, \ldots, dim(z))$

Vanwege mogelijke herschalingen:

$$x_{j,t}(\theta) \quad j = 1, 2, \ldots, dim(x)$$
$$y_{j,t}(\theta) \quad j = 1, 2, \ldots, dim(y)$$

Ook de matrices:

$$\mathbf{D}(\theta)$$
$$\mathbf{F}(\theta)$$
$$\mathbf{H}(\theta)$$

(Ook hun kwadraten)

$$e_x(k, \theta) = \sum_{j=1}^{dim(x)} \mathbf{D}^2_{kj}(\theta)\, f_x(j)$$

$$e_y(k, \theta) = \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}^2_{jk}(\theta)\, f_y(j)$$

$$e_{z_{t|t-1}}(k, \theta) = \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{F}^2_{kj}(\theta)\, e_{z_{t-1|t-1}}(j, \theta) + \sum_{j=1}^{dim(x)} \mathbf{D}^2_{kj}(\theta)\, f_x(j)$$

$$\mathbf{K}_t(k, \theta) = \frac{e_{z_{t|t-1}}(k, \theta)}{e_{z_{t|t-1}}(k, \theta) + e_y(k, \theta)}$$

$$e_{z_{t|t}}(k,\theta) = \frac{e_{z_{t|t-1}}(k,\theta)e_y(k,\theta)}{e_{z_{t|t-1}}(k,\theta) + e_y(k,\theta)}$$

Dit te zamen met de al bekende definities:

$$\begin{aligned}
z_{t|t-1}(k,\theta) &= \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{F}_{kj}(\theta)\, z_{t-1|t-1}(j,\theta) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{dim(x)} \mathbf{D}_{kj}(\theta)\, x_{j,t}(\theta) + s_k(\theta) \\
z_{t|y_t}(k,\theta) &= \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}_{jk}(\theta)\, y_{j,t}(\theta) \\
z_{t|t}(k,\theta) &= (1 - \mathbf{K}_t(k,\theta))\, z_{t|t-1}(k,\theta) + \mathbf{K}_t(k,\theta) z_{t|y_t}(k,\theta)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Al deze functies moeten ook nog gedifferentieerd worden naar θ (zie Bijlage B).

Het algoritme van *statespace* werkt nu als volgt: Er wordt gebruik gemaakt van variabelen Z_t, dZ_t, EZ_t en dEZ_t die gedurende het algoritme voordurend van betekenis veranderen.

Op tijdstip $t = 1$:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= z_{1|y_1}(k,\theta) \\
EZ_1 &= e_y(k,\theta) \\
dZ_1 &= \frac{\partial z_{1|y_1}(k,\theta)}{\partial\theta_i} \\
dEZ_1 &= \frac{\partial e_y(k,\theta)}{\partial\theta_i}
\end{aligned}$$

Op tijdstip $t = t_n$:

Eerste stap (bepaling $z_{t_n|t_n-1}$):

$$\begin{aligned}
Z_{t_n} &= \mathbf{F} Z_{t_n-1} + \mathbf{D} x_{t_n} + s \\
Z_{t_n} &= z_{t_n|t_n-1}(k,\theta) \\
EZ_{t_n} &= e_{z_{t_n|t_n-1}}(k,\theta) \\
dZ_{t_n} &= \frac{\partial z_{t_n|t_n-1}(k,\theta)}{\partial\theta_i} \\
dEZ_{t_n} &= \frac{\partial e_{z_{t_n|t_n-1}}(k,\theta)}{\partial\theta_i}
\end{aligned}$$

Nu is Z_t de voorspeller $z_{t|t-1}$ en kunnen de residuen worden uitgerekend:

$$s\,sq_{meet(t_n)} = \sum_{i=1}^{dim(y)} \left(y_{i,t_n} - \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{H}_{ij} Z_{j,t_n} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ssq_{meet(t_n)}}{\partial\theta_r} &= 2\sum_{i=1}^{dim(y)}\left(\left(y_{i,t_n}-\sum_{j=1}^{dim(z)}\mathbf{H}_{ij}Z_{j,t_n}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{\partial\left(y_{i,t_n}-\sum_{j=1}^{dim(z)}\mathbf{H}_{ij}Z_{j,t_n}\right)}{\partial\theta_r}\right)\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{dim(y)}\left(\left(y_{i,t_n}-\sum_{j=1}^{dim(z)}\mathbf{H}_{ij}Z_{j,t_n}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{\partial y_{i,t_n}}{\partial\theta_r}-\sum_{j=1}^{dim(z)}\frac{\partial\mathbf{H}_{ij}Z_{j,t_n}}{\partial\theta_r}\right)\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{dim(y)}\left(\left(y_{i,t_n}-\sum_{j=1}^{dim(z)}\mathbf{H}_{ij}Z_{j,t_n}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{\partial y_{i,t_n}}{\partial\theta_r}-\sum_{j=1}^{dim(z)}\left(\frac{\partial\mathbf{H}_{ij}}{\partial\theta_r}Z_{j,t_n}+\mathbf{H}_{ij}\frac{\partial Z_{j,t_n}}{\partial\theta_r}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$ssq_{meet(t_n)}$ en $\partial ssq_{meet(t_n)}/\partial\theta_r$ worden voor alle t gedeeld door het aantal tijdstippen en gesommeerd. Op deze wijze komt er een zogenaamde doelfunctie tot stand, welke geminimaliseerd moet worden.

Vervolgens wordt in EZ_{t_n} de waarde van $\mathbf{K}_t$ geschreven,

$$EZ_{t_n} = \frac{EZ_{t_n}}{EZ_{t_n}+e_y(\theta)}$$

Na deze stap moet Z_{t_n} 'geupdate' worden naar $z_{t_n|t_n}$, volgens vergelijking (5.4):

$$Z_{t_n} = (1-EZ_{t_n})\,Z_{t_n} + EZ_{t_n}\,z_{t|y_{t_n}}$$

dZ_{t_n} en dEZ_{t_n} worden op basis hiervan afgeleid, waarna EZ_{t_n} en dEZ_{t_n} weer hun oorspronkelijke betekenis krijgen van de variantie van de error van Z_{t_n} waarna het volgende tijdstip verwerkt kan worden.

6 Conclusie

De aard van dit onderzoek brengt met zich mee dat conclusies niet zozeer in termen van verkeersveiligheid kunnen worden geformuleerd. Het onderzoek richtte zich meer op eigenschappen van het model.

Aan de orde zijn geweest ten eerste een manier ter implementatie van het het toestandruimtemodel, met aandacht voor interpretatie in termen van verkeersveiligheid. Ten tweede is aandacht besteed aan aan een implementatie welke bij de SWOV beschikbaar is.

In essentie zijn de toepassingen van het model tweeledig:

- Analyse van het mechanisme waaraan een geanalyseerd proces onderhevig lijkt te zijn.
- Het maken van voorspellingen aan de hand van een al dan niet eerder geanalyseerd proces.

Ten behoeve van het eerste punt is er een model van Harvey, Harvey (1985), aan de hand waarvan interventie-analyses uitgevoerd kunnen worden. Een van de essentiële aannamen in het model van Harvey is echter een bepaalde structuur van de overgangsmatrix. Deze structuur biedt aan de ene kant de mogelijkheid om krachtige statistische methoden toe te passen, zowel voor wat betreft interpretatie van de modelfit als voor toetsing van eventuele interventies. Het nadeel is echter dat deze methoden alleen geschikt zijn voor enkelvoudige tijdreeksen. Bovendien beperkt deze methode zich tot op numeriek meetniveau gemeten variabelen in de uitvoerruimte.

Alternatieve implementaties zoals DYNAMALS Bijleveld (1989) leggen deze beperkingen niet op, doch genieten niet van de krachtiger statistische mogelijkheden, een probleem waar alle analysetechnieken met herschalingen mee zitten: zie ook SAS (1990).

Het DYNAMALS-model wordt in de toekomst uitgebreid met een zogenaamde meerweg-variant, welke replicaties van het model kan analyseren. Dit kan dienst doen als methode ter analyse van meerdere proefpersonen op een gelijk traject, of vergelijken van verschillende regio's waar een zelfde maatregel wordt uitgevoerd onder bijna identieke omstandigheden. Bovendien moet worden opgemerkt dat de voortdurende toename in rekenvermogen de mogelijkheden complexere modellen te analyseren steeds doet toenemen.

Daarnaast levert de praktische implementatie van dit model nog problemen op, zie Bijleveld *et al.* (1991).

In dit laatste werk komt ook het verschijnsel ter sprake dat toestandruimtemodellen in staat zijn periodieke effecten te modelleren. Daardoor is het mogelijk met behulp van deze techiek meerdimensionale, elkaar beïnvloedende processen te analyseren en wellicht aan de hand daarvan voorspellingen te maken over bepaalde aspecten van de processen, verkeersveiligheid in het bijzonder. Deze technieken staan echter in de kinderschoenen, zowel wat betreft implementatie als interpretatie. Deze technieken zouden gebruikt moeten worden bij de recent in opkomst komende voorspellingsmodellen. Daar echter de diagnostiek van de modellen beperkt is zal er nog veel overgelaten moeten worden aan een op gezond verstand gebaseerde interpretatie van de resultaten. De toekomst biedt echter wel perspectieven.

Een belangrijk mijlpaal in de toekomst lijkt me de introductie van een meerdimensionaal interventie-analysemodel, welke voor tijdreeksanalyse met controlegroepen gebruikt zou moeten worden. Bovendien lijkt de introductie van meerweg DYNAMALS, zoals die wordt voorgesteld door het Instituut voor Datatheorie der Rijksuniversiteit Leiden Verboon & Heiser (1990), een interessante aanleiding om eens een hernieuwd onderzoek in te stellen naar de verplaatsingsprofielen.

Literatuur

Akaike, H. (1974) *Markovian representation of stochastic processes and its application to the analysis of autoregressive moving average processes. Ann. Inst. Statist. Math.*. 26: 363–387.

Bijleveld, F.D, Bijleveld, C.C.J.H, de Leeuw, J, and Oppe, S. (1991) *Least squares optimization of linear dynamic systems using majorization, multiplier and Quasi-Newton methods*. UCLA Statistics series 84. University of California at Los Angeles, Los Angeles.

Bijleveld, C. C. J. H. (1989) *Exploratory linear dynamic systems analysis.* Proefschrift. Rijksuniversiteit Leiden.

Harvey, A.C. (1985) *Multivariate time series models, control groups and intervention analysis.* Economics Programme Discussion Paper A53. London School of Economics, London.

Otter, P. W. (1986) *Dynamic structural systems under indirect observation: Identifiability and estimation aspects from a system theoretic point of view*. *Psychometrica.* 51: 415–428.

SAS Institute. (1990) *SAS/STAT Users's Guide.* Version 6 edition.

Verboon, P and Heiser, W J. (1990) *Some possibilities for the analysis of dynamic three-way data.* Rood rapport RR-90-01, Rijksuniversiteit Leiden, Leiden.

A Definities uit de lineaire algebra

Hier volgen enige definities uit de lineaire algebra: Allereerst wordt verondersteld dat getallen element zijn uit het lichaam der reële getallen.

Definitie 3 (Reële vector.) Onder een vector verstaan we in het vervolg een rij van n reële getallen. Het aantal elementen, n in dit geval, wordt de dimensie genoemd.

Voor vectoren definieren we nu de volgende operaties:

i. **Optellen** : De som van twee reële vectoren is weer een reële vector. Het mechanisme gaat als volgt: als de vectoren $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dan is $a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$. Het eenheidselement in V voor deze operator is $(0, \ldots, 0)$, ook als gewoon 0 genoteerd.

ii. **Skalaire vermenigvuldiging**: Het skalaire product van een reële vector en een (maximaal) reëel getal is weer een reële vector. Het mechanisme gaat als volgt: als p een reëel getal is en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dan is $p \times a = (p \times a_1, \ldots, p \times a_n)$.

Definitie 4 (Reële vectorruimte.) Laat V een verzameling reële vectoren zijn. Als voor ieder paar vectoren x en y element uit V en voor ieder paar reële getallen p en q geldt dat de vector $z = p \times x + q \times y$ element is uit V dan is V een reële vectorruimte.

Verder moet ook de norm van een vector genoemd worden, welke niets meer voorstelt dan een functie op de getallen waaruit de vector bestaat. Neem weer $a = (a_1, \ldots, a_n)$, dan is de norm van a, genoteerd als $||a||$, een functie met de eigenschappen:

i. $||a|| \geq 0$ voor alle a uit de vectorruimte V.

ii. $||a|| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

iii. $||a|| + ||b|| \geq ||a + b||$ voor alle a en b uit V.

iv. $||p \times a|| = \text{abs}\,(p) \times ||a||$ voor alle a uit V en p een reëel getal.

Een vectorruimte waarbij een norm wordt gedefinieerd noemt men een genormeerde vectorruimte. Een veel gebruikt voorbeeld van een norm is de lengte van een vector,

$$||a|| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

Definitie 5 (Afbeelding.) Een afbeelding is een operator welke aan ieder element van een (origineel)verzameling een element uit een (beeld)verzameling toevoegt.

Definitie 6 (Lineaire afbeelding.) Een lineaire afbeelding (A van V op W) is een afbeelding met eigenschappen:

i. $A(0) = 0\{= (0, \ldots, 0)\}$

ii. Voor alle elementen x en y uit V en alle skalars p en q geldt:

$$A(p \times x + q \times y) = p \times A(x) + q \times A(y),$$

element uit W.

Als we de (genormeerde) vectorruimte W opdelen in twee, op de oorsprong na, disjuncte lineaire deelruimten W_1 en W_2, dan is er een gelijksoortige opsplitsing is van V in V_1 en V_2 met $V = V_1 \cup V_2$, zodat voor iedere x element uit V_1 geldt dat het beeld van x onder A (dat is $A(x)$) element uit W_1 is en dat voor iedere y element uit V_2 $A(y)$ element uit W_2 is. De omgekeerde procedure levert ook een eenduidige opsplitsing op van W.

Definitie 7 (Kern van een lineaire afbeelding.) De kern (Engels: kernel) van een lineaire afbeelding is een deelverzameling van de origineelverzameling. De elementen van deze verzameling worden door de afbeelding op het nulelement van de beeldverzameling afgebeeld. De kern is (dus) een lineaire deelruimte van de origineelverzameling.

We verdelen nu de origineelverzameling in:

i. Vectoren waarvan na afbeelding door A de norm tenminste een bepaalde factor kleiner wordt.

ii. Vectoren waar dat niet bij gebeurt.

De eerste verzameling noemen we verder de quasikern behorend bij de afbeelding A:

$$quasikern(A) = \{x \in V | factor \times ||A(x)|| \leq ||x||\}$$

Men kan nu iedere vector x uit V op een unieke manier schrijven als de som van een vector x_k uit quasikern(A) en een vector y welke juist niet in $quasikern(A)$ zit. We zouden zelfs een afbeelding kunnen definiëren die de gegeven x op een dergelijke y afbeeldt. De afbeelding $P(x) = y$, aldus gedefinieerd, heeft een sterke overeenkomst met de zogenaamde principale-componentenanalyse (PCA). Dit kan men inzien door zich te realiseren dat men bij PCA de observaties uitdrukt in de belangrijkste (principale) componenten (hier het gedeelte van de observaties in de niet-quasikern) en een restant (hier het gedeelte van de observaties in de quasikern).

In het algemeen wordt een lineaire afbeelding vaak voorgesteld als een matrix, dit is eigenlijk een naam voor een rij vectoren. Als we voor de kolommen in de matrix de beelden nemen van de basisvectoren van een lineaire vectorruimte onder een gegeven afbeelding dan vinden we een unieke voorstelling van deze lineaire afbeelding ten opzichte van de basisvectoren van de vectorruimte.

Definitie 8 (Norm van een matrix.) De norm van een matrix A, genoteerd als $||A||$, is een zo klein mogelijk (positief) getal zodanig dat $||A(x)|| \leq ||A|| \times ||x||$ voor alle x element uit de (genormeerde!) vectorruimte V (en W). Duidelijk is dat er eerst normen op de vectoren moeten bestaan, en dat deze normen een norm op een matrix 'induceren'.

B Afgeleide functies statespace

In Hoofdstuk 5 zijn de volgende functies gedefinieerd:

Vanwege mogelijke herschalingen:

$$x_{j,t}(\theta) \quad j = 1, 2, \ldots, dim(x).$$
$$y_{j,t}(\theta) \quad j = 1, 2, \ldots, dim(y).$$

Ook de matrices:

$$\mathbf{D}(\theta)$$
$$\mathbf{F}(\theta)$$
$$\mathbf{H}(\theta)$$

(Ook hun kwadraten)

$$e_x(k,\theta) = \sum_{j=1}^{dim(x)} \mathbf{D}^2_{kj}(\theta)\, f_x(j)$$
$$e_y(k,\theta) = \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}^2_{jk}(\theta)\, f_y(j)$$
$$e_{z_{t|t-1}}(k,\theta) = \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{F}^2_{kj}(\theta)\, e_{z_{t-1|t-1}}(j,\theta) + \sum_{j=1}^{dim(x)} \mathbf{D}^2_{kj}(\theta)\, f_x(j)$$
$$\mathbf{K}_t(k,\theta) = \frac{e_{z_{t|t-1}}(k,\theta)}{e_{z_{t|t-1}}(k,\theta) + e_y(k,\theta)}$$
$$e_{z_{t|t}}(k,\theta) = \frac{e_{z_{t|t-1}}(k,\theta) \times e_y(k,\theta)}{e_{z_{t|t-1}}(k,\theta) + e_y(k,\theta)}$$

Dit te zamen met de al bekende definities:

$$z_{t|t-1}(k,\theta) = \sum_{j=1}^{dim(z)} \mathbf{F}_{kj}(\theta)\, z_{t-1|t-1}(j,\theta)$$
$$+ \sum_{j=1}^{dim(x)} \mathbf{D}_{kj}(\theta)\, x_{j,t}(\theta) + s_k(\theta)$$
$$z_{t|y_t}(k,\theta) = \sum_{j=1}^{dim(y)} \mathbf{H}_{jk}(\theta)\, y_{j,t}(\theta)$$
$$z_{t|t}(k,\theta) = (1 - \mathbf{K}_t(k,\theta))\, z_{t|t-1}(k,\theta) + \mathbf{K}_t(k,\theta) z_{t|y_t}(k,\theta)$$

We zullen ze nu één voor één afleiden naar een parameter θ_i:

$$\frac{\partial x_{j,t}(\theta)}{\partial \theta_i} = \begin{cases} 0, & \text{als } x_j \text{ niet herschaald behoeft teworden,} \\ f(\theta_i), & \text{met } 0 < f(\theta_i) < 1 \text{ de fractie} \\ & \text{van voorkomen van deze categorie } (\theta_i) \end{cases}$$

$$\frac{\partial y_{j,t}(\theta)}{\partial \theta_i} = \text{analoog}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{eenvoudig}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{eenvoudig}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{eenvoudig}$$

$$\frac{\partial e_x(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{dim(x)} \left(2\mathbf{D}_{kj}(\theta)\frac{\partial \mathbf{D}_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i}\right) f_x(j)$$

$$\frac{\partial e_y(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{dim(y)} \left(2\mathbf{H}_{jk}(\theta)\frac{\partial \mathbf{H}_{jk}(\theta)}{\partial \theta_i}\right) f_y(j)$$

$$\frac{\partial e_{z_{t|t-1}}(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{dim(z)} \left(2\mathbf{F}_{kj}(\theta)\frac{\partial \mathbf{F}_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} e_{z_{t-1|t-1}}(j,\theta) + \mathbf{F}^2_{kj}(\theta)\frac{\partial e_{z_{t-1|t-1}}(j,\theta)}{\partial \theta_i}\right) + \sum_{j=1}^{dim(x)} \left(2\mathbf{D}_{kj}(\theta)\frac{\partial \mathbf{D}_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} f_x(j)\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_t(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{e_y(k,\theta)[\partial e_{z_{t|t-1}}(k,\theta)/\partial \theta_i] - e_{z_{t|t-1}}(k,\theta)[\partial e_y(k,\theta)/\partial \theta_i]}{\left(e_{z_{t|t-1}}(k,\theta) + e_y(k,\theta)\right)^2}$$

$$\frac{\partial e_{z_{t|t}}(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_t(k,\theta)}{\partial \theta_i} e_y(k,\theta) + \mathbf{K}_t(k,\theta)\frac{\partial e_y(k,\theta)}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial z_{t|t-1}(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{dim(z)} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} z_{t-1|t-1}(j,\theta) + \mathbf{F}_{kj}(\theta)\frac{\partial z_{t-1|t-1}(j,\theta)}{\partial \theta_i}\right) + \sum_{j=1}^{dim(x)} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} x_{j,t}(\theta) + \mathbf{D}_{kj}(\theta)\frac{\partial x_{j,t}(\theta)}{\partial \theta_i}\right) + \frac{\partial s_k(\theta)}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial z_{t|y_t}(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{dim(y)} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{jk}(\theta)}{\partial \theta_i} y_{j,t}(\theta) + \mathbf{H}_{jk}(\theta)\frac{\partial y_{j,t}(\theta)}{\partial \theta_i}\right)$$

$$\frac{\partial z_{t|t}(k,\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_t(k,\theta)}{\partial \theta_i}\left(z_{t|y_t}(\theta) - z_{t|t-1}(\theta)\right) + \frac{\partial z_{t|t-1}(\theta)+}{\partial \theta_i} + \mathbf{K}_t(k,\theta)\left[\frac{\partial z_{t|y_t}(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial z_{t|t-1}(\theta)}{\partial \theta_i}\right]$$